Exercice 18

1) $f: M(x,y) \mapsto M'(X,Y)$

$tq \begin{cases} X = \sqrt{2}(x+y) \\ Y = \sqrt{2}(x-y) \end{cases}$ (*)

$M(z) \mapsto M'(Z)$

$z = x + iy \quad ; \quad Z = X + iY$

avec $Z = \sqrt{2}(x+y) + i\sqrt{2}(x-y) = \sqrt{2}(1+i).\bar{z}$

d'où f est une similitude indirecte de centre O, de rapport $|\sqrt{2}(1+i)| = 2$

soit Δ son axe. $\Delta = \{M \in P / \ \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}\}$

$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow Z = 2z \Leftrightarrow \sqrt{2}(1+i).\bar{z} = 2z$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1+i)(x-iy) = 2(x+iy)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt{2}x \\ x-y = \sqrt{2}y \end{cases} \Leftrightarrow y = (\sqrt{2}-1)x$

d'où

$$\boxed{\Delta: y = (\sqrt{2}-1)x}$$
$$f = h_{(0,2)} o S_\Delta = S_\Delta o h_{(0,2)}$$

2) a) $(C'): 5X^2 + 5Y^2 + 5XY - 64 = 0$

D'après (*), $(C): 5\left(\sqrt{2}(x+y)\right)^2 + 5\left(\sqrt{2}(x-y)\right)^2 + 12(x^2-y^2) - 64 = 0$

.....

.....

$(C): \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

(C) est une ellipse de centre O, de foyers $F(0, \sqrt{6})$; $F'(0, -\sqrt{6})$

$D: y = \dfrac{8}{\sqrt{6}}$; $D': y = \dfrac{-8}{\sqrt{6}}$

b) $(C') = f(C)$

(C ') est une ellipse de centre $f(0) = 0$; de foyers $K(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = f(F)$

$K'(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = f(F')$

De directrices $\Delta = f(D)$ et $\Delta' = f(D')$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn